INTRODUCTION A LA DEMONSTRATION ET APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT DEDUCTIF

R. DUVAL et M.A. EGRET
Irem de Strasbourg

Diderot a développé le "Paradoxe sur le Comédien". On pourrait, dans le même sens, développer le Paradoxe du Mathématicien, lorsque celui-ci s'adresse à un public de non professionnels de sa discipline. La démarche qui est à ses yeux vraiment objective, qui seule permet d'établir la vérité d'une affirmation et qui exclut toute obscurité comme toute ambiguïté d'interprétation, se révèle être la moins communicable et la plus sujette à équivoque dès qu'il ne s'adresse plus à un "pair" ! Davantage même, non seulement les efforts déployés ne lèvent pas les incompréhensions rencontrées, mais ils renforcent une répulsion à l'égard de la démonstration qui s'étend à l'image des mathématiques. Et cela aussi bien auprès d'un public d'élèves de collège, que de lycéens ou même d'étudiants de DEUG.

Pourtant ce n'est pas le nombre et la variété des solutions proposées qui manquent. Au total, on a essayé de jouer sur tous les tableaux. Effet de séduction, en proposant une activité de recherche sur des problèmes conduisant à de "beaux" résultats mathématiques. Effet de surprise ou de suspense, en restreignant les démonstrations aux situations dans lesquelles ce qui est à démontrer ne peut être découvert que par le développement de démonstration. Mobilisation de l'implication person-

nelle des élèves, en les plaçant dans une situation où ils aient à débattre entre eux et donc à argumenter pour ou contre une solution. Entraînement à la manipulation d'outils logiques, en proposant des exercices sur les connecteurs. Visualisation des différentes étapes dans le développement de la démonstration, en proposant des outils de type graphe propositionnel... L'hétérogénéité des solutions proposées suffirait à montrer que ce qui est simple et objectif aux yeux du professionnel des mathématiques cache en fait une complexité et des décisions peu évidentes que l'on ne remarque pas, ou que l'on passe sous silence, tout simplement parce qu'elles ne relèvent pas des mathématiques. Mais lorsqu'il s'agit de s'adresser à un public de non professionnels, lorsqu'il s'agit d'enseignement et par conséquent d'apprentissage par des jeunes, collégiens ou lycéens, une telle complexité ne peut plus être ignorée. Comment leur faire comprendre ce qu'est une démonstration et ce qui n'en est pas une ?

On ne peut pas oublier que toute démonstration est inséparable d'une activité cognitive à l'œuvre aussi bien dans la recherche d'une démonstration que dans sa présentation ou que dans la compréhension d'une démonstration déjà produite. Or l'analyse de cette activité cognitive complexe sous-jacente à toute démonstration a, jusqu'à présent, peu retenu l'attention. Il suffit d'ailleurs de voir le caractère très général de tout ce qui est écrit sur le raisonnement pour s'en rendre compte.

Mais avant d'entrer plus avant dans le problème, il importe de s'arrêter sur le mot "démonstration". C'est un mot sensible. Il suscite souvent des réactions vives de la part du mathématicien dès que celui qui l'emploie n'est pas un mathématicien : la démonstration, cela ne peut pas être ce que présente et ce qu'analyse le non professionnel. C'est aussi un mot qui suscite des associations. Qui dit "démonstration" dit "méthodes" de démonstration. Et on peut en énumérer un certain nombre susceptibles d'être enseignées : (Glaeser, 1971, p. 99-112). Sans prétendre restreindre une expérience dont la défense vive par les professionnels ferait croire qu'elle est autant mystique que rationnelle, nous désignerons dans cet article, sous le terme "démonstration", tout raisonnement valide permettant d'établir la justesse (valeur de vérité "vraie") d'une proposition. Le problème de l'introduction à la démonstration, dans l'apprentissage des mathématiques, est donc celui de la découverte de ce qu'est un raisonnement valide et de la compréhension de son fonctionnement. Or ce problème devient particulièrement aigu lorsqu'il s'agit de raisonnements valides mettant en jeu des énoncés en langue naturelle, comme c'est le cas en géométrie. Car, il s'agit alors de ne pas confondre un raisonnement dont la validité peut être contrôlée, comme le raisonnement déductif, avec des raisonnements dont la validité ne peut pas être contrôlée comme une argumentation. Et, plus particulièrement, il s'agit de découvrir ce qu'apporte un raisonnement valide établissant la justesse d'une proposition déjà énoncée et "connue", par rapport à la valeur épistémique(1) que cette proposition pouvait avoir avant sa démonstration.

Nous n'allons donc pas présenter directement une "solution" ou une "séquence" didactique décrivant comment s'y prendre pour qu'enfin "ça marche" ! Nous allons plutôt commencer par remonter en amont,

(1) La valeur épistémique est le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition.

en analysant le mode spécifique sous lequel les propositions énoncées interviennent dans un raisonnement par contraste avec celui sous lequel elles interviennent dans une explication, une description ou un récit (Partie I). Puis nous décrirons en détail le fonctionnement du raisonnement déductif par contraste avec celui d'une argumentation (Partie II). Nous en arriverons naturellement au problème de l'expression en langue naturelle d'une démonstration, c'est-à-dire au problème de ses normes, de ses caractéristiques et surtout à celui de son utilité (Partie III). C'est alors seulement que nous pourrons poser le problème crucial de l'apprentissage : toutes les analyses précédentes permettent-elles de dégager un point d'appui solide et permettent-elles également de comprendre sur quoi jouent les différentes solutions proposées jusqu'à présent et d'estimer leur perti-nence ? (Partie IV). Une mise en œuvre didactique sera alors seulement ensuite proposée (Partie V). Malheureusement le cadre d'un seul article est trop étroit pour replacer cet aspect décisif de la découverte de ce qu'est un raisonnement valide et pour situer ce qu'il apporte par rapport à d'autres aspects comme l'heuristique et le travail sur des figures. Nous nous contenterons d'en évoquer les grandes lignes en conclusion. Naturellement toutes les analyses qui seront développées ici s'appuient sur des expériences et sur l'observation de l'évolution des productions d'élèves au cours de ces expériences. Elles ont été exposées dans d'autres articles (Duval 1989,1991, Egret 1989,1990). Plutôt que de répéter ce qui peut être lu ailleurs, il nous a paru plus utile de bien mettre en évidence la complexité cognitive cachée sous ce qu'on appelle démonstration et d'en montrer les conséquences pour l'enseignement.

I — Qu'est-ce qui est mobilisé par le fonctionnement d'un raisonnement ?

Chacun sait que raisonner ce n'est pas décrire ou expliquer. Les fonctions et le fonctionnement cognitif de ces activités sont très différents. Mais peut-on dire, de façon précise, où se situent ces différences, et plus particulièrement, en quoi consiste le fonctionnement spécifique du raisonnement par rapport à celui d'une explication, ou à celui d'une description ? Chacun peut alors vite se rendre compte que répondre à ces questions en parlant de "logique", de "rigueur", d'"enchaînement"... relève d'associations toutes faites et que cela n'aide en rien à cerner ce qui fait le fonctionnement spécifique d'un raisonnement.

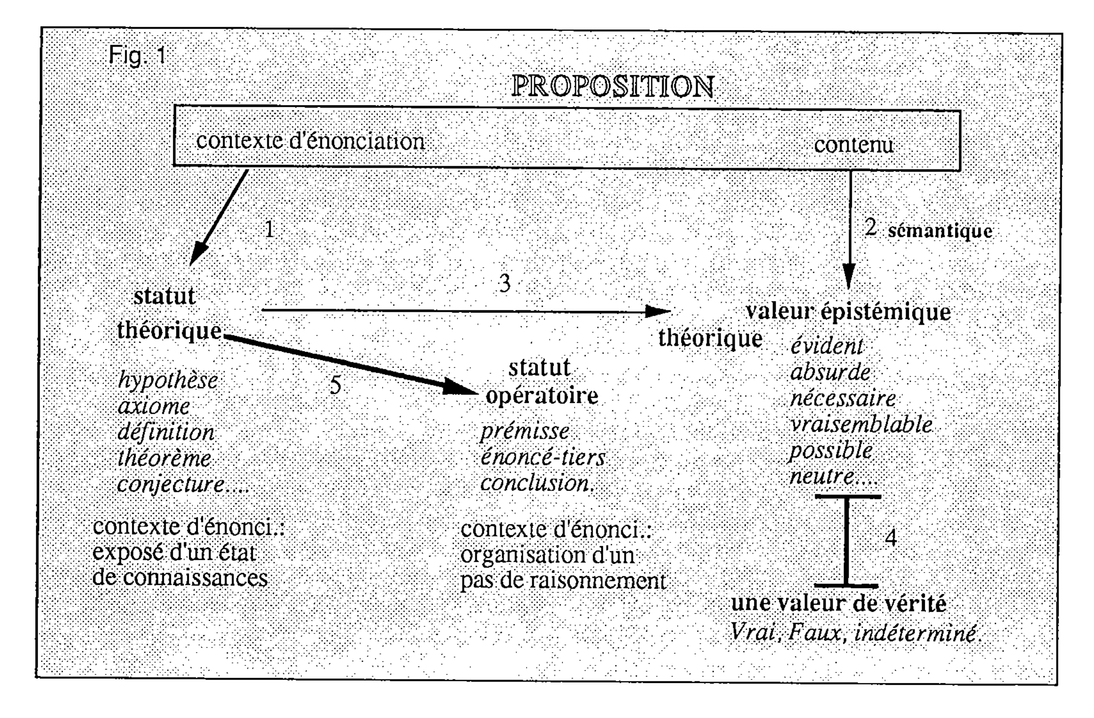
Comme toute explication et comme toute description, un raisonnement met en jeu des propositions qui sont énoncées, c'est-à-dire qui sont soit affirmées, soit niées, soit supposées, soit mises en question... Or, dès qu'il y a énonciation de propositions, il est nécessaire de prendre en compte deux distinctions concernant les propositions : celle entre leur contenu et leur statut, et celle entre leur valeur épistémique et leur valeur de vérité. Ces deux distinctions sont fondamentales pour analyser le fonctionnement cognitif spécifique du raisonnement et pour pouvoir le distinguer de celui d'une explication ou de celui d'une description.

La distinction entre le contenu et le statut d'une proposition est une distinction presque évidente. Une même proposition peut être énoncée dans des développements discursifs différents avec des rôles différents : elle peut être introduite comme règle, comme hypothèse, comme définition,

comme argument, comme conclusion... Plus généralement les propositions énoncées ont toujours deux "faces" : leur contenu et leur contexte d'énonciation. Le statut dépend du contexte d'énonciation.

La distinction entre valeur épistémique et valeur de vérité est peut-être moins immédiate à saisir. Elle s'impose cependant d'une façon aussi indéniable que la précédente. D'un côté une proposition énoncée est ou vraie ou fausse ou d'une valeur de valeur de vérité non encore déterminée. D'un autre côté, une proposition énoncée apparaît d'emblée évidente, absurde, vraisemblable, arbitraire, nécessaire, ou possible,... Ces valeurs épistémiques doivent être soigneusement distinguées des valeurs de vérité, car elles en sont indépendantes. Il est trivial, mais non pas inutile, de rappeler ici qu'il y a des propositions évidentes qui ne sont pas vraies, et des propositions vraies qui ne sont pas évidentes ! De même il y a des propositions qui ont été reçues comme "*absurdes*", et dont on a démontré la vérité. La valeur épistémique d'une proposition énoncée reste souvent implicite. Son explicitation se fait par le recours à des verbes dits "d'attitude propositionnelle", c'est-à-dire à des verbes, ou des expressions, qui introduisent comme complétives la proposition dont ils explicitent la valeur : croire que..., penser que..., imaginer que..., admettre que..., affirmer que..., supposer que..., savoir que..., dire que..., être certain que..., être évident que..., etc.

C'est à partir de cette double distinction que l'on peut analyser le fonctionne-



ment d'un raisonnement et, plus particulièrement, celui d'un raisonnement valide effectué avec des propositions énoncées en langue naturelle, comme c'est le cas pour les démonstrations en géométrie. Cette double distinction entraîne un jeu de dépendances qui peut être représenté par le schéma de la page précédente (fig. 1).

1. Le statut d'une proposition est fixé par le contexte d'énonciation (flèche 1). Il ne dépend en rien du contenu de la proposition.

2. Une même proposition peut avoir, dans le cours d'un raisonnement, deux statuts différents: un statut théorique et un statut opératoire.

Le statut théorique est fixé, avant même la production du raisonnement, par un énoncé qui donne les hypothèses (l'énoncé du problème), et par un corpus d'axio-mes, de définitions et de théorèmes, déjà acquis et constituant le réservoir de "moyens" dans lequel on peut puiser ce dont "on a besoin pour démontrer" le résultat demandé ou cherché. L'explicitation et la distinction des différents statuts théoriques possibles pour une proposition énoncée est naturellement très ancienne. Elle est à la base des *Éléments* d'Euclide. Ce qu'on a appelé la "forme euclidienne", ou encore le raisonnement "*more geometrico* ", repose sur l'explication systématique et préalable du statut théorique conféré aux différentes propositions qui vont servir de cadre et d'appui à la production des raisonnements : "la forme euclidienne c'est la forme démonstrative" (Caveing 1990, p.114). Même si la liste des différents statuts théoriques distingués s'est trouvée un peu modifiée depuis Euclide, le principe d'une explicitation systématique et préalable de statuts théoriques reste le même.

Le statut opératoire est interne à l'organisation du pas de raisonnement. Généralement, pour définir le raisonnement on se contente de mentionner la relation entre deux statuts opératoires : passage des *prémisses* à une *conclusion* . En raison de la possibilité d'inférences directes, on passe sous silence le statut opératoire d'*énoncé-tiers*. (Blanché, 1980). Le statut opératoire est déterminé par le statut théorique (Fig.1, flèche 5). On a ainsi la correspondance indiquée par la figure 2 de la page ci-contre.

3. Chaque statut théorique induit une valeur épistémique (fig.1 : flèche 3). Le statut de théorème est lié à la valeur épistémique de nécessité puisqu'il ne peut concerner que des propositions dont la vérité a été démontrée, c'est-à-dire obtenue comme conclusion d'un raisonnement valide.

En revanche, certains statuts théoriques peuvent induire différentes valeurs épistémiques. Ainsi, dans la pensée grecque, le statut d'axiome d'abord limité à des propositions dont le contenu semblait évident a induit la valeur épistémique d'évidence. Considéré depuis le XIXème comme une convention, il induit la valeur épistémique de neutralité.

Le statut opératoire de conclusion, qui n'est déterminé par aucun statut théorique. Il crée la valeur épistémique de nécessité, lorsque l'organisation du pas correspond à l'application de la règle de détachement, classiquement appelée "*modus ponens*" (voir Fig. 2).

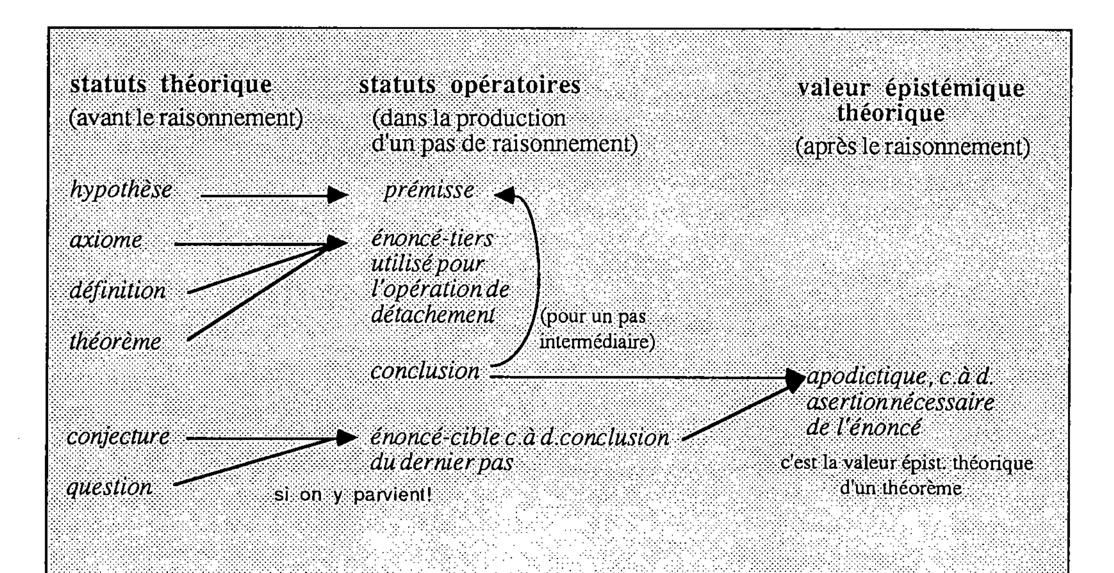


Fig.2. Détermination des statuts opératoires en fonction des statuts théoriques et production d'une nouvelle valeur épistémique pour la proposition obtenue comme conclusion. Naturellement, le sens des relations marquées par les flèches de la fig.2 n'est pas réversible. Toute prémisse n'est pas une hypothèse. Il y a même des pas de raisonnement dont aucune prémisse ne correspond à une hypothèse, ceux dont les prémisses sont des conclusions intermédiaires. Le statut opératoire de conclusion n'est déterminé par aucun statut théorique préalable: il est spécifique à l'organisation d'un pas de raisonnement.

4. Toute proposition énoncée en langue naturelle a une valeur épistémique sémantique qui est automatiquement induite par la compréhension que l'on a de son contenu (Fig.1 : flèche 2). Ce qui est énoncé apparaît évident, absurde, vraisemblable, etc., en fonction des connaissances dont on dispose, de ce qu'on perçoit, des croyances et des normes du milieu auquel on appartient, etc. Cette valeur épistémique induite par le contenu ne doit pas être confondue avec celle qui est induite par le statut théorique (flèche 3).

Naturellement, pour une proposition donnée il peut y avoir un écart important entre la valeur épistémique sémantique et la valeur épistémique théorique. Et quand une seule de ces deux valeurs est privilégiée, ou seulement perçue, il en résulte une situation d'incompréhension sans issue au niveau d'une explication ou d'une discussion. Cela est fréquemment le cas lors de l'enseignement de la géométrie au Collège. L'élève qui ne perçoit pas l'importance des statuts théoriques et qui, donc, perçoit uniquement la valeur épistémique sémantique

des propositions, ne peut pas comprendre ce que ça "apporte" de démontrer une proposition dont le contenu est évident. L'enseignant qui, au contraire, a pris l'habitude de ne s'attacher qu'à la valeur épistémique théorique des propositions voit bien que la proposition n'a aucune évidence théorique tant qu'elle ne peut pas être nécessairement dérivée de propositions déjà établies. Et il ne comprend pas que l'apposition d'une étiquette à chaque proposition pour indiquer son statut théorique et l'explication du mode d'emploi aient peu ou pas d'efficacité auprès des élèves. De là à interpréter les échecs et les confusions comme une absence de maturité ou comme une incapacité à raisonner, il n'y a qu'un petit pas !

5. Une valeur de vérité est associée à chaque valeur épistémique (fig.1 : trait 4). Mais cette association n'est pas la même dans toutes les disciplines et dans toutes les situations de discussion. Ainsi, on n'a pas les mêmes associations en mathématiques, dans les sciences expérimentales, en histoire, ou encore dans le cadre d'une conversation sur un sujet d'actualité. Par exemple, la valeur épistémique "évident" et la valeur de vérité "vrai" sont spontanément et généralement associées. C'est pourquoi, il est incompréhensible de vouloir démontrer ce dont le contenu a une valeur épistémique sémantique d'évidence. De même on associe généralement les valeurs "absurde" et "faux".

Mais en mathématiques, la valeur de vérité "vrai" est exclusivement associée à la valeur épistémique "nécessaire", laquelle peut seulement être obtenue par le statut opératoire de conclusion. Même l'association entre "absurde" et "faux" n'est pas acceptée : on a établi la vérité de propositions dont la valeur épistémique était celle de l'absurdité. Cette restriction dans l'association entre valeur épistémique et valeur de vérité vient ajouter au facteur d'incompréhension que nous venons de mentionner.

Toute cette analyse permet déjà de comprendre l'une des deux différences essentielles qui sépare un raisonnement valide effectué avec des propositions énoncées en langue naturelle, et une argumentation menée dans la cadre d'une discussion, où il s'agit de prendre en compte les objections ou les contradictions d'un interlocuteur, éventuel ou effectivement présent, pour défendre ou pour réfuter une thèse. Une argumentation ne se développe pas dans un double contexte d'énonciation, pour la simple raison que les propositions énoncées n'ont pas, pour la plupart sinon pour toutes, de statut théorique. Cette absence de statut théorique entraîne une absence de statut opératoire explicitement déterminé pour les propositions.

L'argumentation doit donc directement faire appel à la valeur épistémique des propositions induite par le contenu (valeur épistémique sémantique). Et cette valeur épistémique induite par le contenu peut être celle induite pour celui qui argumente ou celle induite pour celui à qui est adressée l'argumentation. C'est en raison du recours à une double valeur épistémique sémantique qu'une argumentation ne fonctionne pas par *modus ponens* comme un pas de raisonnement déductif. Ainsi une situation d'argumentation peut devoir gérer un conflit non pas entre une valeur épistémique théorique et une valeur épistémique sémantique, mais entre les valeurs épistémiques sémantiques propres à

chaque interlocuteur. En revanche, il ne peut pas y avoir de conflit entre deux valeurs épistémiques théoriques, hormis le cas de paradoxe.

On voit donc le point fondamental que le raisonnement déductif et l'argumentation ont en commun : ils jouent tous les deux sur la valeur épistémique des propositions. Mais on voit aussi la première différence importante qui les oppose. Le raisonnement déductif joue indirectement sur la valeur épistémique des propositions, par le biais de statuts fixés de façon externe (cf. fig.2). L'argumentation, au contraire, joue *directement* sur la valeur épistémique des propositions sans paraître se soucier de leur statut. C'est en raison de cette différence que le raisonnement déductif est un raisonnement dont la validité peut être contrôlée tandis que l'argumentation est un raisonnement dont il est impossible de contrôler la validité mais dont il est seulement possible d'évaluer la pertinence (Duval, 92b).

Il nous faut maintenant examiner le fonctionnement du raisonnement déductif, lequel joue indirectement sur les valeurs épistémiques, c'est-à-dire prend les propositions énoncées non pas par rapport à leur contenu, mais par rapport aux statuts que le contexte énonciatif détermine.

II — Les deux niveaux d'organisation dans le fonctionnement du raisonnement déductif.

Si on compare l'organisation d'un raisonnement déductif à celle d'une argumentation, on découvre que le raisonnement déductif comporte deux niveaux d'organisation pour les propositions énoncées, et non pas un seul. Il y a, d'une part, l'organisation locale des propositions propre à chaque pas de déduction, et d'autre part l'organisation globale des propositions propre à l'orientation vers l'énoncé-cible. Ces deux niveaux ne relèvent pas des mêmes principes et ne correspondent pas au même fonctionnement cognitif.

1. *Organisation et fonctionnement d'un pas de déduction.*

L'organisation d'un pas de déduction dépend entièrement du statut opératoire des propositions énoncées et non pas de leur contenu. Cela permet d'effectuer une opération très particulière : une partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par "alors...") est "détachée" comme conclusion du pas de déduction, après vérification que les prémisses correspondent bien à l'autre partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par "si...").*Cette opération de détachement ne se retrouve dans aucune autre forme de pratique discursive, y compris l'argumentation.* Donner un argument pour justifier une affirmation n'est pas pratiquer une opération de détachement. On comprend donc que le fonctionnement d'un pas de déduction soit insoupçonnable de la plupart des élèves !

En effet, la production, ou la compréhension, d'un pas de déduction par un élève nécessite une triple perception :

— la perception que l'organisation des propositions constituant un pas se fait en fonc-

tion de leur seul statut opératoire déterminé par le statut théorique,

— la perception de la séparation en deux parties des énoncés-tiers : une partie de propositions qui doivent être données comme prémisses, la partie Conditions, et une partie à détacher, la partie Conclusion,

— la perception que la seule tâche à effectuer pour effectuer un pas de déduction est de comparer les prémisses à la partie Conditions de l'énoncé-tiers. S'il y a recouvrement (*mapping*) , on ne produit pas une autre proposition, on détache seulement la partie Conclusion de l'énoncé-tiers.

Cette triple perception est loin d'être spontanée ou facile à acquérir chez la grande majorité des élèves. Et cela pour une raison toute simple : elle va à l'encontre de la production discursive pratiquée dans toute discussion et dans toute argumentation. En effet, dans une argumentation, les propositions y interviennent d'abord en fonction de leur contenu, et on ne se limite pas à un ensemble de propositions dont le statut a été préalablement et systématiquement fixé (Duval 1992b). En outre, les propositions qui pourraient être considérées comme des énoncés-tiers, à savoir les principes et les règles, y sont utilisées comme des arguments et non pas comme des moules contenant déjà la conclusion à détacher. La distinction entre les prémisses et l'énoncé-tiers (de structure bi-partite) ainsi que la relation de vérification qui les unit sont donc étrangères au raisonnement argumentatif. C'est pourquoi la pratique discursive de l'argumentation fait écran à cette triple perception requise pour la production ou pour la compréhension d'un pas de déduction.

Il n'est donc pas surprenant que des élèves, à qui l'on a soigneusement fait séparer les hypothèses et la conclusion, oublient ensuite cet étiquetage dans la conduite de leur démonstration. Le vice de raisonnement que cet oubli entraîne ne reflète que le défaut de la première perception, celle relative à l'organisation d'un pas en fonction du seul statut. Le défaut des deux autres perceptions est moins visible, bien qu'il ait des effets aussi graves. Ainsi, un des obstacles non immédiatement repérables à la pratique du raisonnement déductif est la compréhension syncrétiste des théorèmes : il n'y a pas de discrimination entre la partie Conditions et la partie Conclusion. Un élève peut "savoir" ses théorèmes et ne pas du tout percevoir la séparation entre leurs deux parties ! La perception de cette séparation ne se fait que dans la tâche de vérification d'un recouvrement de chaque condition avec une prémisse.

2. *Organisation globale et progression vers l'énoncé-cible.*

Le niveau global d'organisation correspond à l'"enchaînement" des différents pas de déduction. Le principe d'organisation peut être énoncé très simplement pour deux pas de déduction : deux pas de déduction sont enchaînés en un seul raisonnement lorsqu'il y a *recyclage de la conclusion* du premier pas comme l'une *des prémisses* du second. Lorsqu'il y a davantage de pas, et surtout qu'il a plusieurs enchaînements qui sont développés de façon indépendante avant de "confluer" en un seul enchaînement (structure d'arbre), le principe d'organisation reste le même: les conclusions des

différentes branches sont réunies comme prémisses d'un nouveau pas de déduction. Autrement dit, l'enchaînement se fait systématiquement et exclusivement par répétition de chaque conclusion précédemment obtenue dans l'organisation du pas suivant. Simplement, la proposition répétée change de statut opératoire : de conclusion, elle devient prémisse.

Voici, à titre d'exemple, le graphe propositionnel représentant l'organisation d'un raisonnement déductif (Fig.3 ci-après). Nous l'avons élaboré à partir d'un problème et de la rédaction de sa solution qui sont présentés dans un manuel de 4ème comme "exemple de recherche et de rédaction d'une démonstration" (Deledicq & Lassave & Missenard, 4ème 1988 p.166).

ABCD est un parallélogramme de centre O.
M et J sont les milieux respectifs des segments (AD) et (DC).
Démontrer que les droites (AJ), (CM) et (BD) sont concourantes.

I. Préparation

— tracé d'une figure:

— recensement des hypothèses:

— conclusion à démontrer

A B M O D J C

II Recherche

En regardant la conclusion: si les trois droites (AJ), (CM) et (DB) étaient les médiatrices, les hauteurs, les médianes ou les bissectrices d'un triangle, alors je pourrais conclure qu'elles sont concourantes. A partir des hypothèses: O est centre du parallélogramme ; je pense plutôt à "milieu " et à "médiane" ; et je vois que (DO) est la médiane de ADC issue de D. Mais cette médiane s'appelle aussi (BD), et les autres médianes de ADC sont bien (CM) et (AJ). J'ai gagné ! Je peux tenter de rédiger les déductions dans l'ordre hypothèses Æ conclusion.

III Rédaction

O est le centre du parallélogramme ABCD. C'est le point de concours des diagonales (AC) et (DB) qui se coupent en leur milieu (énoncé du cours de 5ème). O est donc le milieu de (AC) et (DO) est une médiane du triangle ADC. Mais O étant sur (DB), (DO) et (DB) sont la même droite.

M étant le milieu de (AD), (CM) est une médiane du triangle ADC. Et J étant le milieu de (DC), (AJ) est une médiane du triangle ADC.

Les trois droites (DB), (CM) et (AJ), étant les trois médianes du triangle ADC sont concourantes (énoncé 1.2 du cours).

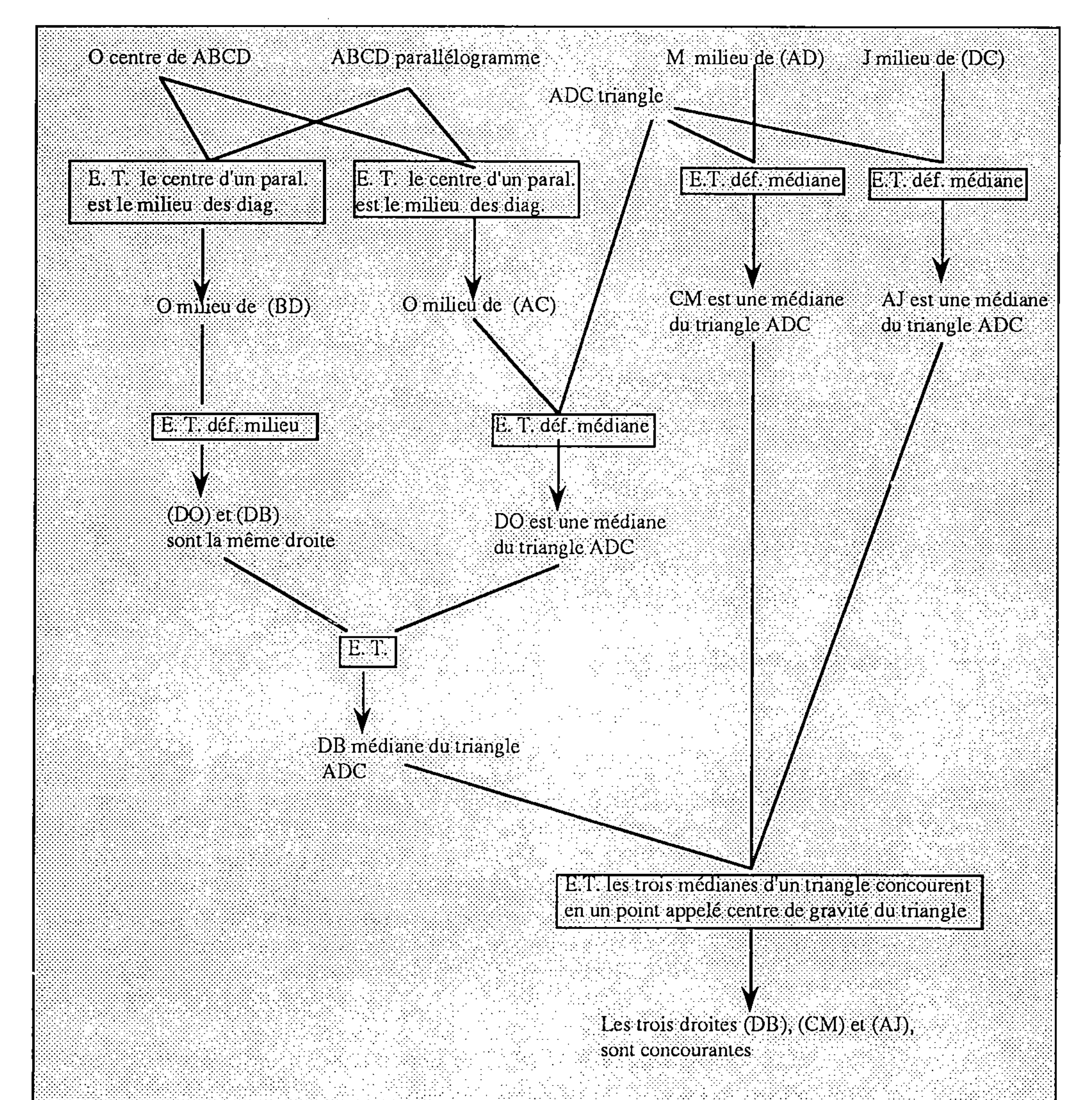


Fig. 3. Graphe propositionnel représentant l'organisation déductive d'une démonstration. *Chaque conclusion est introduite par une flèche partant d'un énoncé-tiers noté E.T.* Les prémisses sont reliées à l'énoncé-tiers correspondant par des traits convergents. Il est donc facile de bien délimiter sur le graphe chaque pas de déduction.

On remarquera que les hypothèses sont rangées tout en haut, et que chaque trait qui les relie à un E.T. marque leur emploi comme prémisses. Certaines hypothèses peuvent donc intervenir comme prémisses soit dans un seul pas, soit dans plusieurs. *En revanche, les conclusions intermédiaires n'interviennent qu'une seule fois comme prémisse.*

L' organisation globale correspond à la progression des pas vers l'énoncé-cible. Elle ne concerne donc pas toutes les propositions, mais seulement celles qui sont obtenues comme conclusions intermédiaires. Or cette progression présente des caractéristiques inhabituelles par rapport à l'organisation de toute autre pratique discursive ou argumentative : elle se fait par substitution les unes aux autres des conclusions, comme dans le déroulement d'un calcul, et non par accumulation de toutes les propositions comme dans les autres formes de pratique discursive. Les conclusions se remplacent comme dans un affichage sur écran, elles ne contribuent pas à découvrir une vision d'ensemble comme les multiples traits de pinceau constituant un tableau.

III — L'expression du raisonnement déductif en langue naturelle

La question de l'expression du raisonnement déductif ne peut évidemment être posée et tranchée qu' à partir d'une analyse de son organisation et de son fonctionnement. Nous la formulerons donc ainsi : comment l'organisation locale des propositions en fonction de leur statut, et celle globale des pas de déduction par recyclage des conclusions antérieures, peuvent-elles être linguistiquement marquées ? Cette question de l'expression du raisonnement déductif est une question dont l'enjeu est important: il s'agit de savoir si la présentation linguistique d'un raisonnement déductif peut en exprimer le fonctionnement. Toutes les analyses précédentes nous assurent déjà de deux points importants :

— l'organisation d'un pas de déduction et l'enchaînement des différents pas ne dépendent en aucun cas de l'emploi de connecteurs,

— l'expression du raisonnement déductif comprend autant de degrés de liberté que l'on veut.

En examinant, par rapport à ces deux points, les textes de démonstrations proposés aux élèves ou les normes de rédaction qu'on tente d'imposer, on constate que les textes proposés ou souhaités déguisent le fonctionnement du raisonnement déductif : ils renforcent l'illusion langagière des connecteurs, écrasent la différence entre les deux niveaux d'organisation et introduisent des raccourcis très subjectifs.

1. *L'illusion langagière des connecteurs.*

Que l'on examine l'organisation locale des propositions en un pas de déduction ou celle globale du raisonnement, le recours à des connecteurs est inutile et non pertinent. Cela est immédiat pour l'organisation globale, puisque l'enchaînement des pas se fait par une reprise de la conclusion antérieure en prémisse du pas suivant. Cela demande un peu plus d'attention pour l'organisation locale des propositions en un pas de déduction.

Il faut tout d'abord se rappeler deux choses. L'organisation locale dépend du statut théorique préalablement fixé pour chaque proposition utilisable. Et, le statut d'une proposition détermine non pas sa valeur de vérité mais sa valeur épistémique. Pour exprimer l'articulation des

propositions en un pas de déduction, il y a donc deux solutions possibles :

— soit se contenter d'énoncer les propositions sans aucune autre précision, puisque leur statut opératoire est déjà fixé et connu ;

— soit exprimer la valeur épistémique correspondant au statut théorique qui détermine le statut opératoire, c'est-à-dire employer un verbe d'attitude propositionnelle : "on sait que...", "on a supposé que...", "on nous a dit que...", "il est nécessaire que...", 'il s'en suit que...", ... Une variante de cette seconde solution consiste à préfixer la dénomination du statut de la proposition "par hypothèse", "par définition...", "en vertu du théorème...", ...

Dans les deux cas l'ajout de connecteurs comme "or", "car", "donc", est purement stylistique : il facilite la lecture ou l'écoute du raisonnement en donnant du "liant" à une succession de propositions qui, autrement, serait élocutivement trop heurtée. D'ailleurs, c'est seulement dans l'expression d'une explication, ou dans celle d'une argumentation, que les connecteurs remplissent une réelle fonction d'enchaînement ou d'organisation des propositions. Ils y marquent des relations établies entre le contenu des propositions énoncées : relation de cause à effet, relation d'opposition, relation de restriction, relation de condition, etc... Ces relations sémantiques ne doivent pas être confondues avec l'opération de détachement d'une conclusion, laquelle constitue le pas de déduction. On voit donc que le raisonnement déductif, à la différence de l'argumentation ou de l'explication, ne requiert l'emploi d'aucun connecteur.

Pourtant, c'est à des connecteurs que l'on recourt surtout pour exprimer, dans l'expression d'une démonstration, l'organisation des propositions dans un pas de déduction et plus particulièrement à l'abominable "si... alors..." ! Comment comprendre cet usage massif de connecteurs, et pourquoi qualifier d'abominable l'emploi du "si... alors..." ? Indépendamment de sa promotion abusive, comme point-clé de l'accès au "raisonnement formel", qui en fut faite dans l'enseignement après les années 70 et sous la caution de la théorie piagétienne, le "si... alors..." est employé indifféremment dans les textes de démonstration pour exprimer deux choses totalement différentes. D'une part, les *statuts fonctionnels de vérité*, ceux d'antécédent et de conséquent, dans une relation d'implication matérielle souvent employée pour la formulation de certains théorèmes. D'autre part *les statuts énonciatifs d'assertion*, ceux de prémisse et de conclusion, dans le fonctionnement d'un pas de déduction. Employer le "si... alors..." pour exprimer ces deux types de statut revient à assimiler entre elles l'expression d'une relation qui fait l'objet d'*une seule assertion*, et l'expression d'un pas de raisonnement qui articule plusieurs *assertions*, celle de chaque prémisse et celle de la conclusion via l'énoncé-tiers. Mais par delà cette duplicité d'emploi du "si... alors..." dans les démonstrations, le recours aux connecteurs pour exprimer les statuts énonciatifs crée une illusion, au sens fort du terme : l'articulation des propositions en un pas de déduction paraît dépendre des connecteurs et non plus des propositions connectées. Il n'y a rien d'étonnant alors à ce que le statut d'hypothèse et celui de conclusion à démontrer soient oubliés au profit du seul contenu des propositions, et

que par suite on mélange les hypothèses et la conclusion.

2. *la variabilité rédactionnelle du raisonnement déductif et la dégénérescence des textes de démonstration.*

Il y a beaucoup de degrés de liberté dans l'expression d'un raisonnement déductif, et les choix effectués n'affectent en rien sa validité. Nous venons de voir, par exemple, qu'il y avait différentes manières de marquer le statut des propositions et que le marquage du statut n'était pas nécessaire, même s'il est utile à titre de rappel. Mais le principal facteur de variation tient au fait qu'il n'est pas nécessaire d'énoncer toutes les propositions intervenant effectivement dans l'organisation d'un pas de raisonnement. Ainsi si la conclusion à recycler en prémisse appartient au pas juste antérieur et vient d'être énoncée, elle peut être omise pour éviter au plan discursif la fâcheuse impression de répétition. De même si l'énoncé-tiers à utiliser pour passer des prémisses à la conclusion est trop trivial, il peut également se trouver omis.

Pour montrer les aléas d'expression que cela entraîne, nous avons schématisé dans le tableau de la page suivante (Fig. 4) l'analyse de la rédaction du manuel de 4ème que nous avons citée plus haut (cf. Partie II)

Qu'on ne se trompe pas sur le choix et sur la portée de l'exemple choisi. On peut faire les mêmes constatations sur la rédaction des démonstrations dans tous les manuels ! Et même dans certains, la rédaction apparaît hautement fantaisiste. Alors comment un élève peut-il s'y retrouver ?

En fait, seuls les énoncés de toutes les conclusions intermédiaires échappent à cette possibilité d'omission ou de saut, à l'exception parfois de ceux qui paraissent trop évidents ou presque tautologiques. Cela revient à dire que la seule expression qui soit importante et irréductible est celle qui concerne le seul niveau global d'organisation déductive, celui qui correspond à la progression vers l'énoncé-cible et à ses principales étapes. Tout ce qui concerne le niveau local d'organisation peut être omis.

L'expression du raisonnement déductif peut donc varier entre deux extrêmes: l'un dans lequel rien ne serait omis de ce qui concerne l'organisation locale de chaque pas, et l'autre dans lequel tout ce qui concerne l'organisation locale des propositions serait omis. La réduction de l'expression à la seule organisation globale présente l'intérêt de rendre plus immédiatement accessible "l'idée de la démonstration" effectuée, ce qui en commande l'heuristique. L'explicitation complète de l'organisation locale de chaque pas permet une vérification de la validité, mais elle présente l'inconvénient de rendre plus difficile la compréhension de l'organisation globale. Naturellement entre ces deux extrêmes, de nombreux choix rédactionnels d'explicitation ou d'omission sont possibles.

L'omission de ce qui concerne l'organisation locale va dans le sens d'une dégénérescence des textes de démonstration parce qu'elle tend à ne retenir qu'un seul niveau d'organisation, alors que le fonctionnement du raisonnement déductif

organisation du pas	texte	remarques
O centre de ABCD ABCD paralléogramme E. T. : le centre d'un paral. est le milieu des diag. ↓ O milieu de (AC)	O est le centre du parallélogramme ABCD. C'est le point de concours des diagonales (AC) et (DB) qui se coupent en leur milieu *(énoncé du cours de 5ème)* O est donc le milieu de (AC) ***et*** (DO) est une médiane du triangle ADC.	Deux prémisses, donc deux propositions, sont fusionnées en une seule proposition grammaticale. Deux conclusions de deux pas différents sont données en une seule phrase ! (cfrt le graphe de la figure 3)
DB médiane du triangle ADC CM est une médiane du triangle ADC AJ est une médiane du triangle ADC E.T. Les trois médianes ...concourent en un point ... ↓ Les trois droites (DB), (CM) et (AJ), sont concourantes	Les trois droites (DB), (CM) et (AJ), étant les trois médianes du triangle ADC sont concourantes (énoncé 1.2 du cours).	Ici, les prémisses sont simplement données par la construction du participe présent, et elles ne font pas l'objet d'un énoncé comme pour le pas ci-dessus.

Fig. 4. Analyse de la rédaction, proposée par un manuel, de deux pas de déduction dans la même démonstration. On peut voir que d'un pas à un autre ce ne sont pas les mêmes choses qui sont omises. En outre, les propositions ayant un statut de prémisses donnent parfois lieu à un énoncé indépendant et d'autres fois non. Cette variation étonnante dans l'expression, qui n'affecte pas la validité du raisonnement, traduit cependant une scotomisation de la spécificité et de l'indépendance des unités propositionnelles dont l'énoncé constitue un pas de déduction.

dépend de deux niveaux d'organisation. Cet écrasement des deux niveaux en un seul a des effets didactiques pervers que l'on retrouve jusque dans la façon dont présente généralement la démonstration: un chemin qui part d'" hypothèses" et qui va vers une "conclusion" en appliquant des "théorèmes" (Deledicq 1988, p.166). Cela peut même être visualisé en écrivant d'un côté d'une feuille, ou d'un écran, les hypothèses qui sont données au départ, et de l'autre côté la conclusion à démontrer. Cela revient à mettre en avant l'organisation globale, alors que le problème de compréhension concerne d'abord l'organisation locale d'un pas et son fonctionnement.

En privilégiant la concision, c'est-à-dire en privilégiant l'omission ou la contraction de ce qui relève du niveau de l'organisation locale, et en marquant le statut des propositions par des connecteurs, c'est-à-dire en masquant le fait que les propositions s'articulent uniquement en fonction de leur statut opératoire, on obtient des textes de démonstration qui sont que des textes dégénérés. Ils ne traduisent plus le fonctionnement spécifique au raisonnement déductif et ils ne peuvent être assimilés au mieux, par des non professionnels des mathématiques, qu'à des textes d'argumentation sans aucune vigueur propre à toute discussion et sans force de conviction.

Toute cette analyse de l'expression en langue naturelle conduit à séparer le fonctionnement du raisonnement déductif et l'expression du raisonnement déductif en langue naturelle. Elle conduit même à opposer le fonctionnement du raisonnement déductif à toutes les pratiques discursives qui sont spontanées ou habituelles dans le cadre d'une discussion ou dans celui d'une explication. La question de la nécessité ou de l'utilité de la tâche de rédaction d'une démonstration, du moins dans le cadre d'un apprentissage du raisonnement déductif et d'une découverte de ce qu'est une démonstration s'impose donc. Est-il vraiment nécessaire de demander à des élèves de Collège d'écrire une démonstration, ou au contraire, ne serait-ce pas la phase de recherche sur la figure qui serait la seule phase importante pour un bon apprentissage des mathématiques ? Que peut leur apporter la tâche de rédaction, lorsqu'ils ont trouvé, ou lorsqu'on les a aidés à trouver, les théorèmes ou les propriétés à utiliser pour démontrer un énoncé-cible déterminé ? Et, de toutes façons, cette tâche ne serait-elle pas au dessus des moyens de nombre d'élèves de Collège ?

IV — Le problème de l'apprentissage

Nous avons vu qu'un raisonnement était une démarche discursive dont le but est de modifier la valeur épistémique d'un énoncé-cible dans le sens de la nécessité de son assertion, en cas de validité de la démarche, et d'en établir ainsi la vérité. Et nous avons vu que le point essentiel sur lequel le raisonnement déductif divergeait de l'argumentation ainsi que de tout fonctionnement discursif en langue naturelle était l'organisation locale de chaque pas. La compréhension du fonctionnement d'un pas de déduction apparaît donc comme le point stratégique pour l'apprentissage du raisonnement déductif et pour la découverte de ce que sont un raisonnement valide et

une démonstration. C'est seulement dans cette compréhension que la conclusion acquiert la valeur épistémique de nécessité pour celui qui effectue le pas de déduction. La *conviction qu'entraîne un raisonnement valide découle intrinsèquement de cette compréhension de son fonctionnement.*

La compréhension du fonctionnement d'un pas de déduction implique une décentration du contenu des propositions au profit de leur statut opératoire, ainsi qu'une utilisation des théorèmes dans le sens d'une opération de détachement et non dans celui d'une justification causale, légale, ou autre. Quelles tâches permettent de faire atteindre ces deux objectifs ?

1. *Nécessité d'un travail dans le registre d'une représentation non-discursive.*

La différenciation entre le contenu et le statut d'une proposition est une distinction étrangère aux pratiques discursives habituelles. Toute proposition est comprise en fonction de son contenu, et sa relation aux autres propositions pour la compréhension d'un discours est généralement inférée à partir des rapports de contenu entre cette proposition et les autres. Organiser localement un discours en fonction du statut théorique des propositions est une pratique discursive bizarre, du moins au regard d'un non professionnel des mathématiques: pour lui, ce qui importe c'est ce que dit la proposition et non pas le statut qu'on lui confère. La décentration du contenu au profit d'un statut qui en est indépendant va donc contre la pratique langagière la plus spontanée et la plus normale. Et ce n'est ni en faisant séparer respectivement les hypothèses, les théorèmes et la conclusion à démontrer, ni en demandant directement un texte, ni en s'en tenant à des explications orales (en français naturellement) que l'on peut espérer faire sortir de cette pratique langagière dominante. Le détour par un autre registre de représentation est nécessaire.

Le registre de représentation qui semble le plus naturel est celui des graphes. C'est celui en tous cas qui a été retenu par différentes recherches psychologiques ou didactiques sur la démonstration (Anderson, 1987, Gaud, 1984, Guin et al., 1990, 1991). Mais ici il faut faire très attention. Il ne suffit pas de présenter des organigrammes de démonstration, ou de les faire construire, pour faire opérer la différenciation entre statut et contenu ainsi que la décentration du contenu au profit du statut. Il faut que la tâche demandée dans ce registre et les moyens donnés pour exécuter cette tâche aient pour objet cette différenciation et cette décentration. Autrement dit, il faut que la tâche et les moyens donnés portent en priorité sur le fonctionnement d'un pas de raisonnement et non sur l'organisation globale (structure d'arbre) du raisonnement déductif.

On peut en effet demander une construction du graphe propositionnel en fixant la tâche de la façon suivante: trouver un chemin qui joigne les hypothèses et la conclusion placées respectivement à droite ou à gauche, en haut ou en bas, d'un écran ou d'une feuille. La tâche de construction porte alors sur le choix des définitions ou des théorèmes qui en partant de la conclusion ou en partant des hypothèses permettent de faire la jonction. Il s'agit d'une tâche essentiellement heuristique.

On peut aussi demander une construction du graphe propositionnel en fixant la tâche tout autrement. Des consignes de construction sont données qui concernent strictement le statut des propositions (des hypothèses il part une flèche mais il n'y en arrive aucune, il arrive une flèche à l'énoncé-cible mais il n'en part aucune, il peut arriver plusieurs flèches aux énoncés-tiers mais il n'en part qu'une seule), les hypothèses et l'énoncé-cible ne sont pas déjà représentés comme extrémités d'un arbre, et une recherche préalable a déjà permis de sélectionner les énoncés-tiers à utiliser. La construction du graphe prend alors une signification différente : la tâche de construction porte sur la détermination du statut des propositions à organiser. En outre les consignes de construction servent de moyens de contrôle extrêmement simples que les élèves peuvent eux-mêmes utiliser pour évaluer et corriger leurs productions. Il ne s'agit plus alors d'une tâche heuristique mais d'une tâche d'organisation déductive.

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, les différences entre ces deux tâches de construction ne sont pas des différences négligeables. D'une part, pour une bonne proportion d'élèves, il n'est pas trivial de placer toutes les hypothèses, sans les relier successivement ou sans les faire dépendre d'une autre proposition, à une extrémité de l'arbre ! D'autre part il apparaît que les théorèmes sont représentés sans être reliés à des prémisses, comme des arguments dans le discours ordinaire ! *Les premières tâches d'organisation déductive sont, en fait, une occasion spectaculaire pour les élèves d'objectiver leur compréhension du raisonnement, de la contrôler et de la faire évoluer, et, pour les enseignants, de prendre conscience de difficultés qui ne sont pas toujours apparentes chez des élèves capables de reproduire des explications ou des textes acceptables.* Plus particulièrement ces premières tâches d'organisation déductive mettent en pleine lumière la déficience, chez la plupart des élèves, de cette triple perception qui est nécessaire à la compréhension d'un pas de déduction (voir plus haut II.1).

2. *Nécessité de l'expression en langue naturelle.*

Le travail dans un registre de représentation non-discursive n'est qu'un détour. La production d'un graphe propositionnel juste ne peut pas être considéré comme suffisante. Un retour au registre la langue naturelle est absolument nécessaire. Pourquoi ? Cette affirmation peut, en effet, d'autant plus surprendre que nous avons longuement insisté sur la séparation entre le fonctionnement du raisonnement déductif et son expression en langue naturelle !

Il y a tout d'abord une raison essentielle sur laquelle Piaget a insisté dans ses premières recherches sur les rapports entre le langage et la pensée: c'est dans l'expression discursive spontanée qu'un sujet prend conscience de propriétés ou de distinctions dont il peut "tenir compte dans l'action sans pour autant l'avoir remarqué" (Piaget 1967, p.79). Un élève peut parfaitement parvenir à construire un graphe propositionnel correct pour une démonstration sans avoir pris conscience des différences de statuts et du double niveau d'organisation impliqués dans la représentation qu'il aura reconstruite. Or cette prise de

conscience est essentielle dans un apprentissage. Ne serait-ce que pour qu'il puisse se libérer de ce type de représentation et distinguer un texte qui est une démonstration (correcte) et un texte qui ne peut pas être une démonstration.

Mais il y a aussi une autre raison inhérente aux relations entre statut, valeur épistémique et valeur de vérité des propositions sur lesquelles repose le fonctionnement du raisonnement (cf. 1ère partie). Ce ne sont pas les mêmes aspects qui apparaissent selon que l'on se situe dans un registre non-discursif ou dans un registre discursif.

D'un côté, **le travail d'organisation déductive, dans le cadre de la construction d'un graphe propositionnel, ne mobilise explicitement que le seul statut des propositions.** D'ailleurs les consignes données pour la construction ne concernent que le statut que les propositions ont dans un contexte théorique fixé (hypothèse, théorème,...). La valeur épistémique et la valeur de vérité des propositions peuvent donc y être parfaitement occultées sans nuire à la réussite de la tâche.

De l'autre côté, **la valeur épistémique d'une proposition liée à son statut théorique ou à son statut opératoire dans le fonctionnement d'un pas de déduction (prémisse, énoncé-tiers, conclusion) ne peut être exprimée que dans le registre de la langue naturelle.** Et on se rappelle que l'expression la plus spontanée, la plus habituelle, la plus structurelle aussi, des valeurs d'une proposition est l'emploi de verbes dit d "attitudes propositionnelles" ou l'emploi de constructions équivalentes (savoir que..., dire que..., conclure que..., affirmer que..., supposer que..., être certain que..., être évident que...).

L'articulation entre les deux registres est donc nécessaire pour qu'il y ait prise de conscience du fonctionnement du raisonnement déductif. Le travail dans le registre non-discursif permet de prendre conscience du fait que la conclusion résulte d'une opération de détachement reposant sur le double statut, théorique et opératoire, des propositions énoncées. L'expression dans le registre de la langue naturelle permet de prendre conscience du changement de valeur épistémique pour la proposition qui acquiert le statut de conclusion dans un pas de déduction. *Or pour qu'une telle prise de conscience puisse se produire il est essentiel que la tâche d'expression demandée soit libre, c'est-à-dire n'impose, ou ne propose, ni contraintes ni modèle de rédaction.* Et c'est justement l'indépendance entre le fonctionnement du raisonnement déductif d'une part et son expression en langue naturelle, d'autre part, qui permet à la tâche de rédaction de jouer un rôle essentiel dans cette prise de conscience. Fixer, au début ou en cours d'apprentissage, des normes d'expression est un contre-sens qui a pour effet de bloquer chez beaucoup d'élèves le processus de prise de conscience. Car le problème de l'apprentissage n'est ni une question de savoir ou de savoir-faire portant sur des théorèmes ou sur l'utilisation de connecteurs ou encore sur des méthodes de démonstration, ni une question de maturité qui viendrait avec l'accumulation des exercices ou des années d'enseignement, c'est d'abord une question de prise de conscience. Et qui dit prise de conscience, dit distanciation par rapport à un mode de fonctionnement familier, habituel ou domi-

nant, et objectivation d'un autre mode de fonctionnement.

V — L'organisation de l'apprentissage en classe.

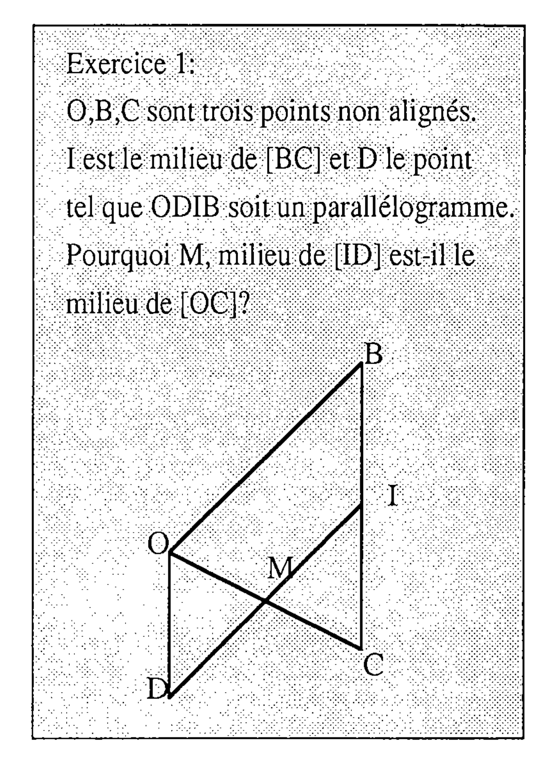
Ces tâches visant à la prise de conscience du fonctionnement spécifique du raisonnement déductif peuvent être proposées aux élèves de collège en trois étapes .

Première étape : A partir de la 6ème, un travail en amont de la démonstration doit être mené. Il s'agit d'approfondir les acquis des élèves dans les domaines suivants : construction de figures, explorations des figures c'est-à-dire retrouver des analogies, dégager des conjectures, etc. (Pluvinage, 1986). Définitions et propriétés sont bien sûr formulées en langue naturelle, mais des représentations (Guin, 1989) de ces règles doivent être proposées de telle sorte que les élèves puissent appréhender de manière opératoire les énoncés-tiers, c'est-à-dire distinguer la partie Conditions d'un énoncé-tiers de la partie à détacher, la partie Conclusion.

Deuxième étape : Dans cette étape de courte durée (une heure), il s'agit de provoquer une discussion dans la classe à propos de différents énoncés et de conduire les élèves à douter de la façon dont ils comprennent le sens des énoncés qu'ils lisent ou qu'ils écrivent.

Exemple d'activité :

— Proposer à la classe de réfléchir aux réponses à la question de l'exercice 1 fournies par deux élèves :



Elève MB :

"OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales [OC] et [ID] se coupent en leur milieu".

Elève SM :

"Si M est le milieu de [ID] et si OICD est un parallélogramme alors M est le milieu de [OC] parce que les diagonales d'un

parallélogramme se coupent en leur milieu".

— Donner la consigne suivante : voici des énoncés dans des étiquettes (supprimer les connecteurs des deux phrases ci-dessus). Relier ces étiquettes par des flèches pour que représentations et phrases aient la même signification.

La réaction des élèves est étonnante : pour le premier énoncé, certains propose un sens de flèche correct, d'autres se trompent de sens et quelques-uns proposent de mettre une flèche dans les deux sens ! Le conflit est à l'intérieur de la classe. Pour le deuxième énoncé (plus complexe), rares sont les élèves à proposer un graphe correct (au cours de l'expérimentation, l'élève SM elle-même nous dit : " je me rends compte que je n'avais pas compris ce que j'avais écrit"). Mais la variation de sens de la même proposition, " *OICD est un parallélogramme* ", en fonction de ses statuts différents dans les deux phrases est apparue (Egret, 1989).

Ce court travail permet de faire prendre conscience aux élèves de la différence de sens entre ces deux énoncés. Cependant, nous n'allons pas plus loin dans l'explication des deux phrases. On peut, bien sûr, créer ce conflit en extrayant d'un travail de la classe le même type d'énoncés.

Troisième étape : rappelons-en les trois principes (Duval & Egret 1989).

1) Séparer la phase heuristique de la phase d'organisation déductive.

2) Proposer de construire un graphe propositionnel (réseau) pour représenter dans un registre de représentation non-discursive l'organisation déductive des propositions.

3) Rédiger, ce qui permet la prise de conscience de tout ce qu'implique l'élaboration d'un graphe et son organisation.

Principe 1 (*à appliquer dès le départ*) : séparer la phase heuristique de la phase d'organisation déductive.

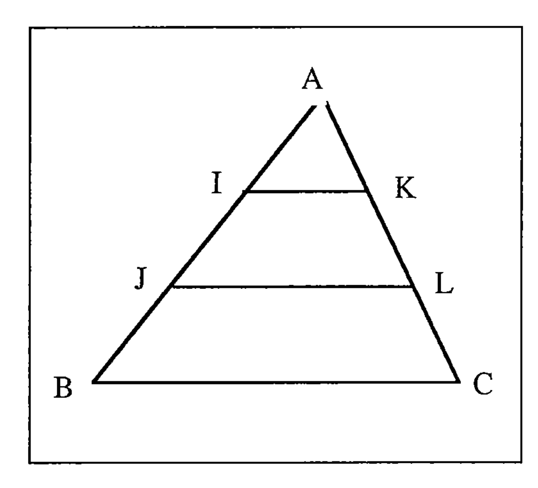
Les élèves travaillent par groupes de trois ou quatre pendant une vingtaine de minutes, puis proposent un plan de solution (cela peut être : trouver une figure extraite ou rajouter une construction qui permet de trouver un ou des théorèmes à appliquer). L'enseignant répond aux demandes des groupes (il écoute les propositions des groupes et rappelle, soit le but fixé, soit les énoncés de départ ou propose des aides possibles ou encourage à persévérer dans une voie qui paraît intéressante). Une mise en commun orale (la figure est dessinée au tableau) est alors faite et tous les élèves ont "une idée " de la solution à la fin de cette phase. Voici, par exemple, la mise en commun d'un exercice proposé (Rauscher, 1989) à des élèves en fin de quatrième, début troisième, qui ne connaissent que le cas particulier du théorème de Thalès, appliqué aux milieux (voir figure page suivante).

ABC est un triangle.

Soient I et J deux points du segment [AB] tels que : AI = IJ =JB.

Soient K et L deux points du segment [AC] tels que AK = KL =LC .

Démontrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



Mise en commun possible : pour montrer que les droites (IK) et (BC) sont parallèles, tracer la droite (BK) et s'intéresser au point d'intersection de cette droite et de la droite (JL).Se placer ensuite dans le triangle BKC.

La durée approximative de cette phase est environ de 35 à 40 min. Cette phase est sans doute la plus difficile. Pendant l'expérience, il s'est révélé que le fait d'avoir compris ce qu'est l'organisation déductive changeait le sens du travail au cours de cette phase de recherche.

Principe 2 : proposer de construire un graphe propositionnel (réseau) pour représenter dans un registre de représentation non-discursive l'organisation déductive des propositions.

Pour représenter une démonstration par un "réseau" (graphe propositionnel), nous donnons aux élèves, dès la construction du premier graphe, les consignes suivantes :

des prémisses (hypothèses ou conclusions intermédiaires) partent une flèche ;

les énoncés-tiers (définitions, théorèmes...) sont des nœuds ;

il n'aboutit qu'une seule flèche à une conclusion ; si elle n'est pas la conclusion finale, il doit repartir une flèche.

Ces consignes simples permettent de comprendre l'organisation d'un pas de déduction ; elles sont un moyen de contrôle efficace pour l'élève soi-même, entre les élèves et entre l'élève et l'enseignant.

Aucun réseau type n'est imposé : il n'y a ni ordre ni présentation obligatoires. Les élèves construisent seuls leur graphe. Tout réseau est accepté et l'enseignant propose individuellement des corrections (par exemple, il signale que la partie Conditions de ce théorème a deux prémisses et cependant il n'y a qu' une seule flèche qui aboutit à l'énoncé-tiers). Toutefois, les idées intéressantes trouvées par l'un ou l'autre élève pour améliorer la prise de conscience sont communiquées à la classe (par exemple, rajouter des couleurs pour différencier les différents statuts).

Après trois ou quatre séances (une par semaine), le graphe propositionnel qui n'est qu'un outil, n'est plus contrôlé par l'enseignant.

Principe 3 : rédiger, ce qui permet la prise de conscience de tout ce qu'implique l' élaboration d'un graphe et son organisation.

Nous demandons aux élèves (après 2 ou 3 semaines) d'écrire un texte qui n'est, en fait, que la description de leur graphe. Les élèves voient alors la figure à travers l'organisation du graphe. Ils vont marquer le statut des propositions en utilisant, non pas des connecteurs mais des expressions "d'attitude propositionnelle" : on sait que (prémisse)..., grâce au théorème..., je suis sûr que (conclusion)...

Dans cette phase, il n'y a pas non plus de corrigé type au tableau. Seuls quelques extraits différents sont lus.

Dans la classe de quatrième où a eu lieu l'expérience, une douzaine d'heures de cours ont été consacrées à l'apprentissage de la démonstration ; les deux tiers de la classe proposent alors des textes dans lesquels sont sous-jacents les deux niveaux d'organisation du raisonnement déductif : ces textes sont longs, rédigés de manière un peu lourde en un ou plusieurs paragraphes. Ce n'est que par la suite, qu'une nette évolution dans le style et la concision des textes des élèves apparaît.

Conclusion

Il n'est peut être pas inutile de rappeler les trois points qui délimitent le domaine des analyses précédentes et des expériences auxquelles elles réfèrent.

— Par "démonstration", nous avons désigné tout raisonnement valide permettant d'établir la justesse (valeur de vérité "vraie") d'une proposition.

— Le raisonnement déductif, c'est-à-dire celui qui fonctionne par opération de détachement sur des propositions organisées en fonction de statuts théoriques préalablement fixés est le raisonnement- type du raisonnement valide.

— La conviction qu'entraîne un raisonnement valide suit la compréhension de son fonctionnement, car c'est dans cette compréhension que la conclusion acquiert la valeur épistémique de nécessité pour celui qui effectue le raisonnement.

Ce simple rappel suffira, nous l'espérons, à réveiller le sentiment que le domaine de la démonstration en mathématique, et plus particulièrement en géométrie, ne se réduit pas au plan délimité par ces trois points. Il y a la recherche et il y a les figures. Et la recherche est autrement plus complexe et plus riche. Sa projection sur le plan que nous avons délimité ne vient qu'en dernier. Une fois qu'on a trouvé, cette projection serait seconde. Alors pourquoi ne pas commencer par là, pourquoi même ne pas s'en tenir à ces aspects plus riches, et pourquoi, au contraire lier l'introduction à la démonstration à l'apprentissage du raisonnement déductif ?

Ce sentiment se traduit généralement, au niveau de l'enseignement secondaire, par la distinction entre trois phases: la préparation dans laquelle intervient la construction de la figure, la recherche et enfin la rédaction. La page de manuel dont nous avons cité un extrait plus haut en est une illustration typique. Et naturellement c'est la phase de recherche qui est considérée comme la phase importante. Aussi vouloir mettre d'abord en avant la compréhension du fonctionnement du raisonnement déductif n'équivaudrait-il pas

à attacher trop d'importance à la phase de rédaction ?

C'est ce partage entre phase de recherche et phase (facultative ?) de rédaction qu'il importe de remettre en question. La séparation entre une phase de recherche et une phase de rédaction, ou plus précisément une phase de mise en forme de la démonstration trouvée, est une séparation didactiquement trompeuse. En effet, cette séparation ne correspond pas du tout au même partage d'activité pour celui qui a compris ce qu'est un raisonnement valide et comment fonctionne un raisonnement valide et pour celui qui ne l'a pas compris. Et cela concerne en priorité la phase de recherche : celui qui n'a pas compris le fonctionnement d'un raisonnement valide ne dispose ni de véritables repères ni de véritables critères dans sa recherche. Et il ne dispose pas de cadre pour assimiler des démarches heuristiques. Il est d'ailleurs surprenant de constater que le plus souvent, les phases de recherche sont décrites et organisées en fonction de ce que nous avons appelé l'organisation globale d'un raisonnement déductif.

Il suffit par exemple de se reporter à la présentation de la phase de recherche dans la page du manuel citée pour haut : elle n'est qu'une autre rédaction acceptable de la démonstration. Autrement dit la séparation entre phase de recherche et phase de rédaction se fait sur le prérequis de la compréhension du fonctionnement d'un raisonnement valide ! La recherche comme la rédaction requièrent cette acquisition. Le type d'apprentissage que toutes les analyses précédentes conduisent à mettre en valeur est un travail d'organisation déductive qui doit se faire dans deux registres. Il n'a d'aucune manière l'objectif que l'on assigne ordinairement à la phase de rédaction.

Reste la question de l'heuristique lorsqu'on a compris le fonctionnement du raisonnement déductif. Dans le travail de recherche, au moins dans la géométrie qui est enseignée au Collège ou au Lycée, un part importante est classiquement reconnue aux figures. Elles fournissent un appui intuitif qui permet une grande économie dans la reconnaissance des objets mathématiques et dans l'appréhension de leurs relations: "on voit sur la figure que...". Mais, en réalité, les figures aident-elles vraiment à "voir" en géométrie ? Remplissent-elles véritablement et spontanément ce rôle qu'on leur prête, très souvent naïvement, de domaine commun au mathématicien et au débutant sur lequel les deux pourraient s'entendre et se comprendre ? Force est de constater que ce n'est pas le cas sur les figures et les questions les plus simples et historiquement parmi les plus anciennes (Padilla 1990).

Et, à la réflexion, cela n'a rien de surprenant. Les figures donnent lieu à différents modes d'appréhension, dont le plus automatisé, celui qui sert de base à la perception spontanée et dont la *Gestalttheorie* a entrepris l'analyse, est loin d'être suffisant (Duval 1988). Entre l'enseignant et l'élève de Collège, il y a bien la même figure regardée, mais ce ne sont exactement le même mode d'appréhension auquel l'un et l'autre font appel. Selon le "champ conceptuel" mobilisé, ce ne sont pas les mêmes traitements figuraux qui se révèlent pertinents. En réalité un travail spécifique sur les traitements figuraux s'avère nécessaire. Et les expériences menées en ce sens, jusqu'à présent donnent des résultats très pro-

metteurs (Lémonidis 1990, Padilla 1992).

Un introduction à la démonstration exige donc des apprentissages en parallèle d'une part des différents traitements figuraux sans lesquels un figure perd toute fécondité heuristique, et, d'autre part, du fonctionnement du raisonnement déductif en tant que celui-ci est le type de base de raisonnement valide en langue naturelle. Et un tel apprentissage doit jouer sur deux registres différents, un registre non-discursif et le registre discursif par excellence qui est celui la langue familière. Et c'est seulement dans l'interaction de traitements effectués et progressivement maîtrisés dans ces différents registres que se développe l'aptitude à "faire de la géométrie" dans le sens qu'un professionnel donne à cette expression. Pour la démonstration, comme pour toutes les autres activités qui ne sont pas acquises de façon innée, c'est dans la coordination de systèmes d'action ou de représentation hétérogènes entre eux que se forme ce qui, au terme de l'acquisition, paraît simple et immédiat.

Références.

Anderson J.R., & Franklin Boyle, C., 1987, Cognitive principles in the design of computer tutors, in Morris P. (ed) *Modelling Cognition*, John Wiley & Sons Ltd.p.93-133.

Blanché, 1980, Raisonnement, *Encyclopédia Universalis*, Paris.

Caveing M., 1990, Introduction générale, in Euclide *Les Éléments,* (tr. Vitrac), vol.I, Paris, P.U.F.

Duval R., 1988, Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1, p.57-74.

Duval R & Egret M.A., 1989, L'organisation déductive du discours: inter action entre structure profonde et structure de surface dans la démonstration, *An. de Did. et de Sci. Cog.*, 2, p.25- 40

Duval R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

Duval R., 1992a, *Sémiosis et Noésis*, préprint.

Duval R, 1992b, Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive, *Petit X* n° 31, p. 37-61.

Egret M.A.& Duval R., 1989, Comment une classe de quatrième a pris de conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *An. de Did. et de Sci. Cog.* 2, p. 41-64.

Egret M.A.,1990, Propositions pour introduire des élèves de collège à l'activité de démonstration, *Publ. de l'Institut de Recherche de Mathé matiques de Rennes*, Fascicule: Didactique des mathématiques, p.1-10.

Glaeser G., 1971, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Paris, Hermann.

Gaud D. & Guichard J.P., 1984, Apprentissage de la démonstration, *Petit X*, 4, p.5-25.

Guin D., 1989, Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie, *An. de Did. et de Sci cog.*, 2, p.89-109.

Guin D.& alii,1991, Modélisation de la démonstration géométrique dans Geometry Tutor, *An.de Did.et de Sci. Cog.*,4, p.5-40.

Lémonidis E.C., 1990, *Conception, Réalisation et Résultats d'une expérien ce d'enseignement de l'homothétie*, Thèse U.L.P., Strasbourg.

Piaget J., 1967, *Le Jugement et le Raisonnement chez l'Enfant*, Neuchâtel, & Niestlé.

Padilla V.,1990, Les Figures aident-elles à voir en géométrie ? *An. de Did. et Sci Cog*, 3, p.223-252.

Padilla V., 1992, *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P., Stras bourg.

Pluvinage F. & Rauscher J.C., 1986, La géométrie construite à l'essai, *Petit X*, 11, p. 5-36.

Rauscher J.C., 1989, Le théorème des tiers, *Suivi scientifique 3 ème*, p. 75-79.